CONCOURS D'ENTREE DES INGENIEURS DE LA VILLE DE PARIS
ouvert le 22 avril 1991

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES
Durée : 2 heures - coefficient : 2

N.B : Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Le candidat pourra, à condition de l'indiquer clairement, admettre un résultat afin de traiter les questions suivantes.
Dans l'appréciation des copies, il sera tenu compte de la rigueur des raisonnements, de la précision de la rédaction, et de la présentation.

Notations :

a) On note $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n+1 à coefficients réels. On considère $\mathbf{R}^{n+1}$ muni de sa structure euclidienne usuelle ; on identifiera dans tout le problème un vecteur x de $\mathbf{R}^{n+1}$ et la matrice colonne X de ses coordonnées dans la base canonique, soit :

$$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

b) n désigne un entier naturel tel que $n \geq 2$.

c) On note $[\![m,p]\!]$ l'ensemble $[m,p] \cap \mathbf{N}$, où $(m,p) \in \mathbf{N}^2$, $m \leq p$.

d) Dans tout le problème, K désigne la matrice de $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ définie par :

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & & \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & -k_{n-1} & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ 0 & \cdots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

avec $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$.

Partie I :

1°) Montrer que K est diagonalisable.

2°) On définit l'application Q de $\mathbf{R}^{n+1}$ dans $\mathbf{R}$ ainsi :

$$\forall X \in \mathbf{R}^{n+1} \longmapsto {}^tX K X \in \mathbf{R}$$

Montrer que :

$$\text{si } X = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ alors } Q(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i (x_i - x_{i-1})^2$$

3°) En déduire l'ensemble N_Q défini par :

$$N_Q = \{X \in \mathbf{R}^{n+1} \mid Q(X) = 0\}$$

En déduire que 0 est valeur propre de K.

4°) Montrer que toutes les valeurs propres de K sont positives ou nulles.

5°) Montrer qu'un vecteur propre de K ne peut avoir une première composante nulle.

En déduire que tous les sous-espaces propres sont de dimension 1, puis que toutes les valeurs propres de K sont deux à deux distinctes.

Dans toute la suite du problème, on notera $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de K, avec $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$.

On étudie dans la suite du problème certaines propriétés du système différentiel $(\mathcal{S})$:

$$(\mathcal{S}) : X'' + K X = F(t)$$

où X désigne une fonction vectorielle inconnue de $C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n+1})$ et F une fonction vectorielle donnée de $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n+1})$.

Partie II :

On se place dans cette partie dans $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$, soit n = 2.

1°) Déterminer les valeurs propres de K et les sous-espaces propres associés. On vérifiera que les sous-espaces propres obtenus sont orthogonaux deux à deux.

Tournez la page S.V.P.

2°) Exprimer le système différentiel $(\mathcal{S})$ dans une base (U_0, U_1, U_2) de vecteurs propres de K, U_i étant associé à la valeur propre λ_i, pour $i \in [\![0, 2]\!]$. Le système différentiel obtenu sera noté $(\mathcal{I})$.

3°) Une solution particulière Y_0 du système $(\mathcal{I})$ étant supposée connue, donner la forme des solutions du système $(\mathcal{I})$ dans la base des vecteurs propres choisis.

4°) Y_0 étant toujours supposée connue, donner la forme des solutions X de $(\mathcal{S})$ dans la base initiale dans le cas où $k_1 = k_2 = k$.

Partie III :

On revient au cas général : $n \geq 2$.
Le produit scalaire de deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^{n+1}$ sera noté $(X|Y)$.
Soit Ω l'ensemble de réels défini par :

$$\Omega = \{ \omega \in \mathbb{R}_+ \mid \forall i = 0, 1, \dots, n, \ \omega^2 \neq \lambda_i \}$$

On suppose que $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, où $F_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, et $\omega \in \Omega$
On étudie les solutions de $(\mathcal{S})$ de la forme :

$$X : t \longmapsto X(t) = A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t),$$

où $(A(\omega), B(\omega)) \in (\mathbb{R}^{n+1})^2$.

1°) Soit $V_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, tel que $V_0 \neq 0$, et Θ l'application de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans lui-même définie par :

$$\forall X \in \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto \Theta(X) = (V_0|X)\, V_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$$

a) Montrer que Θ est une application linéaire, et déterminer son rang.

b) Donner l'expression de la matrice M de Θ dans une base orthonormée quelconque, en fonction de la matrice colonne V_0.

2°) Exprimer $A(\omega)$ en fonction de K, ω, et F_0. Calculer $B(\omega)$.

3°) Pour tout j de $[\![0, n]\!]$, on note U_j un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j de K.

Montrer que $A(\omega) = \sum_{i=0}^{n} \frac{A_i}{\lambda_i - \omega^2} F_0$,

où pour tout i de $[\![0, n]\!]$, A_i désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, indépendante de ω et de F_0 ; on exprimera A_i en fonction de U_i, et on déterminera son rang.

4°) On note α_i le coefficient de la première ligne et de la première colonne de la matrice A_i. Montrer que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \ \alpha_i > 0$$

5°) Soit $f_0 \in \mathbb{R}^*$, et F_0 le vecteur :

$$F_0 = \begin{bmatrix} f_0 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etudier l'application g de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega \longmapsto \beta / f_0 \in \mathbb{R},$$

où β désigne le coefficient de la première ligne de $A(\omega)$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

6°) Soit K_1 la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$K = \left[\begin{array}{c|ccc} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ \hline -k_1 & & & \\ 0 & & K_1 & \\ \dots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

a) Exprimer $g(\omega)$ en fonction des polynômes caractéristiques de K et de K_1, notés respectivement P et P_1.

b) En déduire que K_1 possède n valeurs propres réelles deux à deux distinctes, notées $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, vérifiant :

$$0 = \lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \lambda_n$$

7°) Dans le cas de II (n=2), vérifier numériquement les inégalités ci-dessus.

FIN